

Rozšíření MA1 pro biochemiky.

Funkce více proměnných - příklady 2. (shrnutí základních pojmů)

1. Je dána funkce

$$f(x, y) = \log(\sqrt{y+1} - x) .$$

- Najděte definiční obor D funkce g a nakreslete jej.
- Vypočítejte $\nabla f(0,0)$;
- Ukažte, že funkce f je v bodě $[0,0]$ diferencovatelná . Určete v tomto bodě diferenciál a rovnici tečné roviny .
- Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace $f(-0,04; 0,02)$.

2. Je dána funkce

$$f(x, y) = 4\sqrt{1 - \frac{y}{x+1}} .$$

- Najděte definiční obor D funkce f a nakreslete jej.
- Vypočítejte $\nabla f(0, -3)$;
- Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě $(0, -3)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce f .
- Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(0, -3, 8)$.
- Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř ?

3. Je dána funkce

$$g(x, y) = \arcsin(x^2 - y) .$$

- Najděte definiční obor D funkce g a nakreslete jej.
- Ukažte, že funkce g je v bodě $(1,1)$ diferencovatelná .
Určete v tomto bodě diferenciál a rovnici tečné roviny .
- Napište lineární aproximaci funkce $g(x, y)$ v okolí bodu $(1,1)$.

4. Ukažte, že pro malá x, y platí $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy} \cong x+y$.

5. Zjistěte, zda funkce $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a} = (2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor, v jehož směru funkce f v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.

6*. Ukažte, že funkce $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + e^y, x + y \cdot \sin z)$ je diferencovatelná v bodě $(1,1,0)$ a napište její diferenciál v tomto bodě.

7*. Ukažte, že funkce $f(x, y) = \sqrt{|x \cdot y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$.